京都帝國大學經濟學會

# 經濟論叢

第五十六卷第二號
昭和十八年二月

論叢



時論



研究



說苑



附錄

# 生產理論に於ける商品群の觀點

青山秀夫

## 一

順序として先づ企業の生產計畫の靜學的理論について敍べねばならぬ。[1] 消費者は欲望滿足の極大を目指して行動し、企業者は利潤の極大を目指して行動すると假定する限り、企業者の均衡從つてその生產計畫の分析が消費者均衡の理論と同樣の構造をもつことは明かである。消費者の選擇の理論が既に明瞭である場合企業者の選擇について論ずべきことは乏しいと云はねばならぬ。とは云へ、ヒックスの生產計畫の靜學的分析は、その問題の構成に於て、在來のものと若干趣を異にする。豫め簡單に此の問題構成の特徵について說明して置きたい。[2]

先づ、ヒックスの生產理論の問題構成に於ける特徵は、生產物と生產要素とを謂はゞ對稱的に待遇する點に存する。卽ち、ヒックスに於ては生產物と生產要素とは平等無差別なる位置を占める。此のためにヒックスは、先づ第一に、生產要素と生產物との違ひはたゞ符號の差 (only a difference in sign) に過ぎずとして、生產要素を「負の生產物」(negative products) として取扱ふ。詳言すればかうである。――今企業が $m$ 種類の生產要素を $y_1\ y_2 \cdots\cdots y_m$ だけ $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_m$ の價格を支拂つて買ひ、これを投下して或る生產物を $x$ だけ生產し、これを價格 $p$ で賣る場合それより得られる剩餘乃至利潤 $V$ は

$$(1)\qquad V = px - p_1y_1 - p_2y_2 - \cdots\cdots - p_my_m$$

1) 本稿は拙稿「商品群に對する需要」(本誌 第五五卷 第五號 昭和十七年十一月號所揭) に續いてヒックスに於ける商品群觀點の生產理論への適用を論評することを目的とする。但し本稿では生產計畫の動學的分析に於ける此の觀點の適用を論ずる裕を得なかつた。

乃至　$=-p_1y_1-p_2y_2\cdots\cdots-p_my_m+pz$

で與へられるであらう。明かに此の場合生産要素と生産物とは對稱的ではない。記號の文字が異るのみでなく、符號が異つてゐる。ところで今、上記の如く、生産要素は「負の生産物」であるといふ觀點から、

$$(2)\quad x_i=-y_i \quad (i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ m);\quad p=p_{m+1},\ z=x_{m+1}$$

なる置換を行へば(1)は書改められて、

$$(1')\quad V=p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_mx_m+p_{m+1}x_{m+1}$$

となる。これに於ては、生産要素も生産物も最早對稱的である。兩者は、$x_i$の正負によつて區別されるだけである。此の點を除けば、生産要素も生産物も平等の地位に立つてゐる。此の意味に於て以下、生産要素たると生産物たるとに拘りなく、第$i$番目の財を財$i$と略稱する。財$i$は$x_i>0$ならば生産要素であり、$x_i$で生産要素需要量が表はされ、$p_i$で生産要素の價格が表はされることゝなる。之に反して$x_i>0$ならば、財$i$は生産物であり、$x_i$で該生産物の生産高が、$p_i$を以て該生産物の價格が表はされることゝなる。——然し、生産要素と生産物とを對稱的に取扱ふためのヒツクスの工夫は單にそれだけではない。第二にヒツクスは生産函數を陰伏的に定義することによつて、此の二者を對稱的ならしめる。生産要素數量とそれを用ひて生産される生産高數量との間の關係、即ち生産函數は、上記の記號を用ひると、通常、

$$(3)\quad z=\phi(y_1,\ y_2,\cdots\cdots,\ y_m)$$

或は

$$=\phi(-x_1,\ -x_2,\cdots\cdots,\ -x_m)$$

なる形で定義されてゐる。即ち陽表的に定義されてゐる。これに於て生産用役數量は獨立變數であり、生産高は

2) 以下については J. R. Hicks: Value and Capital, 1939, p. 319 et suiv. を參照されたい。

從屬變數であり、明かに兩者の位置は對稱的ではない。これに對してヒックスは

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \equiv x - \phi(-x_1, -x_2, \cdots, -x_m)$$

で定義された函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1})$ を考へる。(3)によつて

$$(4)\quad f(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1})=0$$

である。明かにこれを $x_{m+1}$ について解けば、上記の生産函數(3)が得られ、此の意味に於て方程式(4)は生産函數を陰伏的に定義するが、これに於ても、(3)に見られたやうな、生産要素と生産物との間の非對象性は存在しない。生産要素と生産物との間の差異は消えてゐる。

ヒックスは上記の如く生産物と生産要素とを對稱的に取扱ふが、以上は單に、多種類の生産要素を用ひて生産物をただ一種だけ生産する場合に關するに止まつた。これは從來の生産理論が主として對象として來たところである。ところで、かくの如く、生産物と生産要素とを對稱的に取扱ふこととなると、理論を更に擴張して、多種類の生産要素を使用して、一種類でなく多種類の生産物を生産する場合、即ち結合生産物(joint products)の場合に進むことが容易に可能となる。[3] 上記の餘剩の方程式(1′)にせよ、生産函數を與へる方程式(4)にせよ、生産物の種類が一種類に限られる場合にしか妥當し得ぬものではない。若しその數値が正である如き獨立變數 $x_i$ が二個以上存在するとしても、方程式(4)は使用される生産要素數量と生産物數量との間の關係、從つて生産函數を與へ、方程式(1′)は、かゝる生産活動から得られる剩餘を與へる筈である。即ち結合生産の場合が取扱へることゝなる。

かくの如く剩餘の方程式並びに生産函數を、上記の如く、(1′)及び(4)で與へる場合は、結合生産の問題をも處理することができるが、今此の目的を以て、剩餘の方程式並びに生産函數を與へる方程式に書改めを行ふ。即ち、

3) Hicks: ibid. p. 85.

$m$種類の生產要素を$x_1$ $x_2$……$x_m$だけ投下して$n-m$種類の生產物を$x_{m+1}$ $x_{m+2}$……$x_n$だけ生產するとし、且、夫々の財の價格を$p_i$とする。(勿論價格に附せられる添字は財の番號に應ずる。)從つて、剩餘乃至利潤$V$は

(5) $$V=p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_nx_n$$

で與へられ、生產函數は方程式

(6) $$f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)=0$$

で定義される。

## 二

ヒックスの生產の靜學的理論の問題構成上の特徵は以上の如くである。ところで企業者が利潤を極大ならしめる如く、上記の$n$個の$x_i$の數値の組を決定するとすれば、此の如き最有利な$x$—コムビナチオンは如何なる性質を有するであらうか。企業の均衡の問題がこれであるか、此の問題は消費者の均衡の問題と同樣に次の如くにして解決される[1]。

企業者は、技術的條件(6)に拘束されつゝ、餘剩$V$の極大を求める。卽ち、條件附きの極大が問題である。從つて問題は、ラグランジュの未定係數法により、$\mu$をラグランジュの未定係數として

(7) $$\Phi(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m;\ \mu)=V-\mu f$$

で定義された補助函數$\Phi$を考へ、此の$\Phi$に何の制限もなしに極値を與へる如き$x_1$ $x_2$……$x_m$ $\mu$の値の組を求めることに歸着する。卽ち最有利な$x$—コムビナチオンは、$f$の$x_i$に關する偏導函數を$f_i$とするとき

(8) $$\mu f_i=p_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

1) 以下論ずる企業の均衡並びにその安定の條件は、Hicks: Value and Capital. では第六章(p. 78—88)で概念的並びに幾何的に取扱はれ、數學附錄第18節(p. 319—320)に於て解析的に論ぜられてゐる。

と(6)とを滿足する如きものでなければならぬ。[2)]

此の(6)と(8)とが企業の均衡の方程式である。卽ち最有利な$x$－コムビナチオンは$(n+1)$個の聯立方程式

$$\begin{cases} (6) \quad f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)=0 \\ (8) \quad \mu f_i = p_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n) \end{cases}$$

の解でなければならぬ。然し此の$(n+1)$個の聯立方程式を$n+1$個の未知數$x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n\ \mu$について解いて得られる解が直ちに最有利な$x$コムビナチオンであるとは、云へない。換言すれば利潤の極大を與へるとは直ぐには云へない。それが利潤の極大を與へるためには、更に充分條件が滿足されねばならぬが、此の充分條件は今の場合、次の如きものである。――いま上記の補助函數$\Phi$について、$x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$の間に何らの依存關係も存しないものとして、その第二次全微分をつくる。若し、(6)(8)の解たる$x$－コムビナチオンに於て、

$$(9) \qquad df = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots\ldots + f_n dx_n = 0$$

なる條件の下に、此の第二次全微分が negativdefinit であるならば、(卽ち、$dx_1\ dx_2 \ldots\ldots dx_n$が(9)の條件に從ふ他、全く任意の實數値を取るとき、此の第二次全微分が常に負となるならば) 此の$x$－コムビナチオンに於て$V$は極大となる。(註)

これが今の場合の充分條件である。從つて、最有利の$x$－コムビナチオンに於ては、(9)なる條件の下に於て、$\Phi$の(諸々の$x_i$の間に何ら依存關係がないとした場合の)第二次全微分、卽ち

$$(10) \qquad -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad \left[f_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ji}\right]$$

が negativdefinit であると考へられる。卽ち條件(9)の下に$dx_1\ dx_2 \ldots\ldots dx_n$の二次形式

2) 此の均衡の概念的法則化については、Hicks: ibid. p. 86 を見よ。$i$を生産物、$j$を生産要素とするとき、$f_i : f_j$は "the marginal product of the factor $j$ in terms of the product $i$" であり、通常「限界生産力」と呼ばれるものに相當するが、Hicks はこれを "marginal rate of transfotmation" と呼んで

(10′) $\sum\sum f_{ij}\,dx_i\,dx_j$

が positivdefinit である。このことは、行列式

(11) $\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$, ……, $\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

が凡て負であることに他ならない。これが企業の均衡の安定條件である。[3] 以下便宜上此の行列式の最後のものを $F$ で表はし、$F$ に於ける $f_{ij}$ の餘因數を $F_{ij}$ で表はすことゝする。

さて方程式(6)(8)は $(n+1)$ 個の方程式を含み、此等の $(n+1)$ 個の方程式は互に獨立であると看做される。從つてこれを $(n+1)$ 個の變數 $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ 及び $\mu$ について解くことができる。今かくの如くにして(6)(8)を解いた結果を

$$(12)\quad \begin{cases} x_i = x_i(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n) & (i=1, 2, \ldots\ldots, n) \\ \mu = \mu(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n) \end{cases}$$

とする。明かに(12)で定義された $x_i$ 及び $\mu$ は(6)(8)を滿足するものであるが、このことから、(12)の函數の經濟的意味が明かにされる。市場で一定の價格系列 $p_1\ p_2 \ldots\ldots p_n$ が與へられゝば、(12)によつてこれに應じた諸々の $x_i$ 及び $\mu$ の値が定まるが、此の $x_i$ 及び $\mu$ は上記の利潤極大の必要條件(6)(8)を滿足するものである。即ち、利潤の極大を目指して行動する場合の企業の生産要素需要量乃至生産物生産高に他ならない。此の意味に於て、(12)は企業の生産要

ゐる。

3) 此の條件の經濟的意味については、Hicks: ibid. pp. 86—87. を見られたい。

素に對する需要函數及び生產物の供給函數を與へるものである。以下便宜上此の兩者を一括して企業の市場活動函數と呼ぶこととしよう。

然らば此の企業の市場活動函數は如何なる構造をもつか。[4] 此の問題に答へるものがかのスルウツキイ方程式である。今上記の(6)(8)に於て諸々の $x_i$ 及び $\mu$ を、(12)に示す如く、價格系列 $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_n$ の函數と看做して、價格 $p_i$ の變動に對する $x_i$ の變動の比率を求めれば、微積分學に於ける陰函數の微分法の教ふる手續きによつて、

$$(13)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{F_{ij}}{\mu F} \qquad [F_{ij}=\text{cofactor of } f_{ij} \text{ in } F]$$

を得る。便宜上今此の式の右邊を $-\mathbf{x}_{ij}$ と置けば、

$$(14)\qquad \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -\mathbf{x}_{ij}$$

となる。ヒックスは消費者の市場活動に關して現はれた同樣のものを「代用效果」(substitution effect)の表現と解したのに對して、ここに現はれる諸々の $\mathbf{x}$ が意味するところを「生產效果」(production effect)と呼ぶが、ここでは簡單のため、前と同樣に $\mathbf{x}_{ij}$ を「財 $i$ と財 $j$ との間の代用の項」と呼ぶこととしよう。[5]

此の $\mathbf{x}_{ij}$ は、消費者選擇の理論に於けると同樣に、全く同樣の六個の性質を有する。然し、此の性質、並びにその經濟的意味については、既に敍べたからここには繰返さない。[6] 此の場合特に注意を要するのは、寧ろ $\mathbf{x}_{ij}$ の正負が有する經濟的意味である。[7] $\mathbf{x}_{ij}$ に於て財 $i$ は生產要素でもあり得るし、又生產物でもあり得る。又財 $j$ も同樣である。然も生產要素の場合は、例へば、財 $j$ が生產要素の場合をとつて云へば、$p_i$ の變化に對する生產要素 $j$ の需要の變化を見るためには、$x_j$ ではなく $-x_j$ がどう變動するかを考へねばならぬ。(吾々は生產要素を「負の生產物」と見たから。) 此の結果、$\mathbf{x}_{ij}$ のもつ經濟的意味は著るしく錯綜すること次表に示す通りであるが、然しそれにも拘は

4) 以下については Hicks: ibid. pp. 320—322. 並びに安井琢磨教授「企業の動學理論」(日本經濟學會年報 第二輯) p. 164. 以下を參照されたい。
5) Hicks: ibid. p. 90. 此の點については尚前掲拙稿、p. 536 參照。
6) Hicks: ibid. p. 321. 前掲拙稿、p. 537.

らず、此等の複雑な事態を一貫する原理が存在する。

| $x_{ij}$ の經濟的意味（財 $i$ の價格 $p_i$ の騰貴の效果） | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 財 $i$ は | 生產物 | 生產要素 | 生產物 | 生產要素 |
| | 財 $j$ は | 生產物 | 生產要素 | 生產要素 | 生產物 |
| $x_{ii}<0$ （財 $i$ に及す影響） | | 生產物 $i$ の生產增 | 生產要素 $j$ の使用減 | 生產物 $i$ の生產增 | 生產要素 $i$ の使用減 |
| 財 $j$ に及す影響 | $x_{ij}<0$ | Complementarity | | Regression | |
| | | $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}>0$ 生產物 $j$ の生產增 | $\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i}<0$ 要素 $j$ の使用減 | $\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i}<0$ 要素 $j$ の使用減 | $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}>0$ 生產物 $j$ の生產增 |
| | | | | 要素 $j$ と他の要素 $k$ との間に代用關係 要素 $k$ と生產物との間に補完關係 | |
| | $x_{ij}>0$ | Substitutability | | Covariancy | |
| | | $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}<0$ 生產物 $j$ の生產減 | $\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i}>0$ 要素 $j$ の使用增 | $\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i}>0$ 要素 $j$ の使用增 | $\frac{\partial x_j}{\partial p_i}<0$ 生產物 $j$ の生產減 |
| | | $x_{ij}<0$ dominant | | $x_{ij}>0$ dominant | |

それはからである。—今 $x_{ij}$ が正の場合をとり、價格 $p_i$ が騰貴した場合を考へる。此の場合財 $j$ が生產要素なら

7) 此の點に關する詳細なる概念的說明については、Hicks: ibid. pp. 89—98. を見られたい。

ばその需要は增大し、財$j$が生產物ならばその供給が減少する。しかし、何れにしてもそれが價格$p_j$の變動傾向に及ぼす效果は同一である。卽ち、價格$p_j$の騰貴を誘發する傾向を持つ。卽ち、$x_{ij}$が正の場合、$p_i$と$p_j$とは共通の價格變動傾向を含み、此の意味に於て此の二つの價格は「共變的」であると云へる。これと恰度逆に、$x_{ij}$が負の場合には、$p_i$と$p_j$とは「反變的」であり、一方の價格騰貴は他方の價格下落を誘發する傾向を生む。ヒックスが消費者選擇に關して、「價格共變的」の場合を「代用的」と云ひ、「價格反變的」の場合を「補完的」と呼んだことは既述の如くであるが、ヒックスは同一の觀點を今の場合にも貫徹して、$x_{ij}$が正の場合財$i$と財$j$とは「代用的」(substitutive, rival)であると云ひ、$x_{ij}$が負の場合、財$i$と財$j$とは「補完的」(complementary)であると呼んでゐる。

(註) ここでの私の充分條件の取扱ひは、それがもたらす結果は同一であるとは云へ、その導き出し方に於てヒックスのそれと異つてゐる。ヒックスの充分條件の敍述(Hicks: ibid. p. 320)は不精確であり、同樣のことがまた消費者均衡の安定條件(cf. Hicks: ibid. p. 306)についても云はれ得るが、此の點については園正造教授の示敎に負ふ。尙、條件附の極大極小の問題に於てラグランジュの未定係數法を用ひた場合の充分條件の取扱ひについては、藤原松三郎博士「微分積分學」第二卷一〇〇頁以下にも詳細な說明がある。

## 三

商品群內部に於て相對價格が不變であるならば、該商品群と任意の商品(或は商品群)との間の代用の項を適當に定義する限り、該商品群を單一商品であるかの如くに看做してスルウツキイ方程式を構成することが出來、此の意味に於てその內部で相對價格が不變なる商品群は單一商品と同樣に取扱つて差支へない。—此の如きがヒックスの「價値と資本」を一貫する考察原理の一つであるが、此の觀點が如何なる內容を有するかは、既に前稿に

於て詳論した通りである。從つて[1]吾々は此の商品群の觀點を既知と看做して生產計畫の分析へのその適用に考察を進めることも出來るが、こゝでは此の商品群觀點の內容について前稿とは稍異つた方面から若干の說明を附加へ、尙前稿で省略した說明を補つて置き度いと思ふ。

さて吾々がこゝに證明を要求される命題はかうである。—今財1 2……$m$が商品群を形成し、此等の諸商品相互間の相對價格が不變であるとする。(勿論 $m \leqq n$ とする。尙此の$m$は上記の生產要素の種類の數の$n$と無關係である。) 卽ち $w_1\ w_2 \cdots\cdots w_m$ なる常數を適當に取るとき、

(15) $$p_1 : p_2 : \cdots\cdots : p_m = w_1 : w_2 : \cdots\cdots : w_m$$

或は (15') $$p_i = \gamma w_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

なる關係が成立つ。今、

(16) $$G = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots\cdots + w_m x_m$$

と置いて此の$G$を以て此の商品群の數量を測ると同時に此の商品群そのものをも表すことゝする。上記の(1')に(15')をもちこめば、

(17) $$V = \gamma G + p_{m+1} x_{m+1} + \cdots\cdots + p_n x_n$$

を得るが、此の式は$\gamma$を$G$の價格と看做し得べきことを示す。此の意味で$\gamma$を$G$の價格と呼ぶことゝする。さて次に、今$i$又は$j$を任意の商品又は商品群として

(18) $$X_{Gj} \equiv w_1 X_{1j} + w_2 X_{2j} + \cdots\cdots + w_m X_{mj}$$

(18') $$X_{iG} \equiv w_1 X_{i1} + w_2 X_{i2} + \cdots\cdots + w_m X_{im}$$

1) 「商品群に對する需要」(本誌 第五十五卷 第五號所揭)。

と置く。($x_{ij}=x_{ji}$ であるから當然 $x_{Gi}=x_{iG}$) 然らば$G$を單一商品であるかの如く看做してスルウツキイ方程式を書き下すことができて、

(19) $$\frac{\partial x_j}{\partial r}=-x_{Gj}$$

(19′) $$\frac{\partial G}{\partial p_i}=-x_{iG}$$

となる。(19)(19′)に於て$i$, $j$は1から$n$までの何れでの商品でもよいか、亦、何らかの任意の商品群であつてもよい。

特に

(20) $$\frac{\partial G}{\partial r}=-x_{GG}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}w_iw_jx_{ij}$$

である。次に此の命題を證明しよう。

此の命題の證明の出發點となるのは上記の市場活動函數(12)である。尙これに關して注意を要するのは、此の市場活動函數は、

(14) $$\frac{\partial x_j}{\partial p_i}=-x_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n;\ j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を聯立一階偏微分方程式と看做すとき、此の偏微分方程式を滿足する函數のシステムであるといふことである。これだけの豫備的注意の上に證明を進めよう。假定によつて今の場合財1 2……$m$の間では相對價格比が不變であり、此の意味で(15′)が成立するが、今此の(15′)を市場活動函數(12)にもちこめば、

(21) $$x_i=x_i(rw_1,\ rw_2,\cdots\cdots,\ rw_m,\ p_{m+1},\cdots\cdots,\ p_n)\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

となる。これに於て $w_2$ $w_1$……$w_m$は常數である。卽ち、商品群$G$內部に於て相對價格が不變である場合、$x_i$は$(n-$

$m+1$) 個の價格 $\gamma$ $p_{m+1}$ …… $p_n$ の函數となる。更に此の $x_1$ $x_2$ …… $x_m$ を(16)にもちこめば、

$$(22)\qquad G=\sum_{i=1}^{n} u_i x_i(\gamma u_1,\ \gamma u_2,\ \cdots\cdots,\ \gamma u_m,\ p_{m+1},\ \cdots\cdots,\ p_n)$$

となり、これまた $(n-m+1)$ 個の價格 $\gamma$ $p_{m+1}$ …… $p_n$ の函數であることがわかる。即ち、

$$(22')\qquad G=G(\gamma,\ p_{m+1},\ \cdots\cdots,\ p_n)$$

である。

以上のことが明かとなれば、(19)(19')(20)の證明は容易である。――今(21)について $x_i$ を $\gamma$ について偏微分すれば、函數の函數の偏微分法により、

$$\frac{\partial x_j}{\partial \gamma}=u_1\frac{\partial x_j}{\partial p_1}+u_2\frac{\partial x_j}{\partial p_2}+\cdots\cdots+u_m\frac{\partial x_j}{\partial p_m}$$

を得るが、先に注意した通り、市場活動函數(12)及(21)は偏微分方程式(14)を滿足するから、これは書改められて

$$=-u_1\mathbf{X}_{1j}-u_2\mathbf{X}_{2j}-\cdots\cdots-u_m\mathbf{X}_{mj}$$

となり、更に $\mathbf{X}_{Gj}$ の定義(18)によつて

$$=-\mathbf{X}_{Gj}$$

となる。これによつて $\mathbf{X}_{Gj}$ を(18)の如く定義すれば、(19)が成立することが示される。全く同樣にして(22')の左右兩邊を $p_i$ について偏微分すれば(19')が得られるし、$\gamma$ について偏微分すれば(20)が得られる。

以上は商品群が一個しか存在しない場合であるが、商品群が一個以上存在する場合についても同樣の取扱ひが可能である。今、上記の如く1から $m$ までの商品が群を形成する他、更に $m+1$ から $m+l$ までの商品が今一つの群を形成し、その內部で相對價格が不變であり、從つて

$$p_i = \gamma' u_i' \qquad (i=m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ m+l)$$

であるとしよう。(勿論 $m+l \leqq n$ とする。)上記によつて

$$G' = u'_{m+1} x_{m+1} + u'_{m+2} x_{m+2} + \cdots\cdots + u'_{m+l} x_{m+l}$$

と置き、$G'$を以て此の商品群の數量と名稱とを同時に表はし、$\gamma'$を以て商品群$G'$の價格とする。次に(18)の定義によつて

$$(23)\qquad X_{GG'} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_{iG'} = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=m+1}^{m+l} u'_j X_{ij}$$
$$= \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{m+l} u_i u'_j X_{ij} = X_{G'G}$$

を得る。ところで前と同樣にして、諸々の $u_i$ 及び $G\ G'$ は $(n-m-l+2)$ 個の價格 $\gamma\ \gamma'\ p_{m+l+1} \cdots\cdots p_n$ の函數であるが、$G\ G'$をかくの如きものと看做して$\gamma'$及び$\gamma$について偏微分すれば、全く同樣の手續きによつて

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma'} = -X_{G'G} = -X_{GG'} = \frac{\partial G'}{\partial \gamma}$$

を得る。卽ち、上記の(18)(18')は$i\ j$が商品群であつても成立つのであり、此の意味に於て吾々はその內部で相對價格の不變な商品群を單一商品と同樣に取扱ふことが出來るのである。

## 四

以上によつて吾々が證明しようとした命題は證明された。卽ち、その內部で相對價格比が不變なる商品群が與へられた場合、該商品群の數量、價格、及びそれと他の商品(又は商品群)との間の代用の項を適當に定義する場合、スルウツキイ方程式の形成に關する限り、該商品群を單一商品と同樣に取扱ふことができる。換言すれば、

單一商品と同樣の構造を有する市場活動函數を考へることが出來る。

さてこれまで吾々は商品群と單一商品、或は商品群と商品群との間の代用の項を單一商品相互間の代用の項を表す記號、即ち諸々の$\mathbf{x}$を以て表はして來た。今迄は、商品群が單一商品と同樣に取扱はれ得ることの說明が主眼であつたし、亦そこで取扱はれる商品群も少數であつたから、それでよかつた。然し、これから吾々が取扱はうとする場合は、商品群の數が增大し、且、此等多數の商品群と單一商品との間の、或は商品群相互間の代用が主役を演ずる場合である。從つてかういふ場合を處理するためには、商品群と單一商品との間の代用の項及び商品群相互間の代用の項を表はすために特別の記號を用ふるのが便宜と思ふ。此の意味に於て商品群$G$と單一商品$j$との間の代用の項を$\mathbf{s}_{Gj}$で表はし、更に、單一商品$j$と商品群$G$との間の代用の項も$\mathbf{s}_{Gj}$で表はすこととする。即ち、今迄$\mathbf{x}_{Gj}$或は$\mathbf{x}_{jG}$と記したものを凡て$\mathbf{s}_G$と記すこととする。從つて上記の(18)(18′)によつて

$$\mathbf{s}_{Gj}=\sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{x}_{ij}=\sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{x}_{ij} \tag{24}$$

であり、(19)(19′)によつて、

$$\frac{\partial x_j}{\partial r}=-\mathbf{s}_{Gj}\,;\quad \frac{\partial G}{\partial p_i}=-\mathbf{s}_{Gi} \tag{25}$$

である。（此の場合$\mathbf{s}$に附する添字のうち第一の添字が商品群に關し、第二の添字が單一商品に關することに注意されたい。）更に同樣にして商品群と商品群との間の代用の項を表はすために$\mathbf{S}$を用ひることとする。即ち、前に$\mathbf{x}_{GG'}$で表はしたもの、即ち$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+l} w_i u_j \mathbf{x}_{ij}$を表はすに$\mathbf{S}_{GG'}$を以てしようとするのである。從つて此の記法を用ひると、

$$\frac{\partial G}{\partial r}=-\mathbf{S}_{GG}\,;\quad \frac{\partial G'}{\partial r}=\frac{\partial G}{\partial r'}=-\mathbf{S}_{GG'}\,.$$

である。

かくの如く吾々は、商品群と單一商品との間の、また商品群相互間の代用の項を表すために、便宜上新しい記號 $\mathbf{s}$ 並び $\mathbf{S}$ を導入する。ところで、吾々は諸々の $\mathbf{x}$ に關してかの六個の法則が成立することを知つてゐるが、此の $\mathbf{x}$ について成立する法則は、またそのまゝ $\mathbf{s}$ 及び $\mathbf{S}$ についても成立する。以下二三の代表的な場合を例にとつて、このことを說明しよう。

今上記の $n$ 個の財が任意の分ち方によつて $\nu$ 個の商品群に分たれたとし、商品群 $I$ の單一商品 $j$ に對する代用の項を $\mathbf{s}_{Ij}$ とし、商品群 $I$ の價格を $\gamma_I$ とする。(かくの如く、商品群の番號を示す添字として大文字を利用し、單一商品の番號を示す小文字の添字に對照せしめる。)然るとき、適當に定められたる $n$ 個の常數 $w_1\ w_2 \cdots\cdots w_n$ に對して

$$p_i=\gamma_I w_i \tag{26}$$

が成立する。(但し、財 $i$ は商品群 $I$ に屬するとする。)更に亦 $\mathbf{s}_{Ij}$ の定義によつて

$$\mathbf{s}_{Ij}=\sum_{i\ in\ I} w_i \mathbf{x}_{ij} \tag{27}$$

である。但しこれに於て $\sum_{i\ in\ I}$ は商品群 $I$ に屬する凡ての商品の番號について總和をとることを意味する。さて以上の前提の下に、$\mathbf{x}$ に關する第三の法則、

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{x}_{ij}=0 \tag{28}$$

から、$\mathbf{s}$ に關する法則

$$\sum_{I=1}^{\nu} \gamma_I \mathbf{s}_{Ij}=0 \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mathbf{s}_{Ij}=0 \tag{30}$$

を導くことは容易である。先づ(28)を(26)(27)を用ひて書改めれば、直ちに(29)を得る。また(28)を

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mathbf{x}_{ij} = 0$$

なる形に書改め、此の兩邊に $w_i$ を乘じ、更に此の $i$ を商品群 $I$ に屬する凡ての番號に變へてその總和をつくれば

$$0=\sum_{i\,in\,I} w_i \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbf{x}_{ij}$$

を得るが、此の總和を取る順序を取かへれば、此の式の右邊は

$$=\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i\,in\,I} w_i \mathbf{x}_{ij}$$

となり、これより(27)によつて(30)が成立することが知れる。

次に商品群相互間の代用の項 $\mathbf{S}$ について考へよう。上記の場合商品群 $I$ と商品群 $J$ との間の代用の項 $\mathbf{S}_{IJ}$ を考へれば、定義によつて

$$\mathbf{S}_{IJ}=\sum_{i\,in\,I}\sum_{j\,in\,J} w_i w_j \mathbf{x}_{ij}$$

である。($\sum_{i\,in\,I}$ 及び $\sum_{j\,in\,J}$ の意義は上記によつて容易に類推される。)今(26)と此の關係を用ひて $\mathbf{x}$ について成立する第四の法則

(31) $\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{m} p_i p_j \mathbf{x}_{ij} < 0$ for all values of $m$ less than $n$

から

(32) $\sum_{I=1}^{\mu}\sum_{J=1}^{\mu} r_I r_J \mathbf{S}_{IJ} < 0$ for all values of $\mu$ less than $\nu$

が導き出されることを證明しよう。

今此の $\mu$ 個の商品群に含まれる單一商品の種類の數を $m$ としよう。當然 $m$ は $n$ より小であるから、此の $m$ についても(31)が成立つ。卽ち

(33) $0>\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_i p_j \mathbf{x}_{ij}=\sum_{i}^{m} p_i \sum_{j}^{m} p_j \mathbf{x}_{ij}$

である。ところでこれに於て $\sum_{j}^{m} p_j \mathbf{x}_{ij}$ は(26)により $=\sum_{J=1}^{\mu}\gamma_J\sum_{j \, in \, J} w_j \mathbf{x}_{ij}$ であり、更に(27)により $=\sum_{J=1}^{\mu}\gamma_J \mathbf{s}_{iJ}$ である。今此の結果を(33)にもちこめば、

$$(34)\qquad 0>\sum_{i}^{m} p_i \sum_{J=1}^{\mu}\gamma_J \mathbf{s}_{Ji}=\sum_{J=1}^{\mu}\gamma_J\sum_{i=1}^{m} p_i \mathbf{s}_{Ji}$$

を得る。ところでこれに於て $\sum_{i}^{m} p_i \mathbf{s}_{Ji}$ は、前と同樣に(26)により $=\sum_{I=1}^{\mu}\gamma_I\sum_{i \, in \, I} w_i \mathbf{s}_{Ji}=\sum_{I=1}^{\mu}\gamma_I \mathbf{S}_{IJ}$ である。いま此の結果を(34)にもちこめば

$$0>\sum_{J}^{\mu}\gamma_J\sum_{I}^{\mu}\gamma_I \mathbf{S}_{IJ}=\sum_{I}^{\mu}\sum_{J}^{\mu}\gamma_I\gamma_J \mathbf{S}_{IJ}$$

を得る。これで(32)が成立つことが證明された。

かくの如くにして、$\mathbf{x}$ について成立するかの六個の法則が $\mathbf{s}$ 及び $\mathbf{S}$ についてもそのまゝ妥當することを知り得る。卽ち、商品群內部に於て相對價格比が不變な場合、適當に此の商品群の數量、價格及び他の商品（又は商品群）との間の代用の項を定義する限り、此の商品群を單一商品であるかの如く看做してスルウツキイ方程式を書下すことが出來、然も此の代用の項は、單一商品のそれと同樣に、かの六個の性質を滿足する。此の意味に於てその內部で相對價格比の不變な商品は單一商品と同樣に取扱はれ得るが、此の商品群觀點がその本來の機能を發揮するのは、動學的分析に於てである。吾々は次に企業の生産計畫の動學的分析に於て此の觀點が如何に利用されるか、かの時間的代用關係 (substitutability in time) 時間的補完關係 (complementarity in time) は解析的にどう定義されるか、また、利子步合の變動が生産計畫に及ぼす影響に關して、かの「餘剩の傾斜」(the tilting of the surpluses) 並びに「計畫の平均期間」(the average period of the plan) の理論はどう見らるべきか、を論じなければならぬ。

（附記）本稿は、最初ヒックスの生産計畫の動學的分析、特に "tilting of the surpluses" 及び "average period of the plan" の理論の論評として書き初めたものであるが、その準備として靜學的生産理論に於ける商品群觀點を評論するうち、可成りの分量に達してしまつた。ヒックスの動學的生産理論の論評は別の機會に讓りここには、靜學的生産理論を中心とする商品群觀點の說明だけに止める次第である。